Indépendance faible des quantificateurs

Richard Zuber

Logique & Analyse **198** (2007), x–x

INDÉPENDANCE FAIBLE DES QUANTIFICATEURS

RICHARD ZUBER

Résumé

Quantificateurs Q_1 et Q_2 du type $\langle 1\rangle$ sont faiblement indépendants si et seulement si $Q_1Q_2(R) = Q_2Q_1(R^{-1})$ pour toute relation-produit R. On donne une condition suffisante et nécessaire pour que deux quantificateurs soient faiblement indépendants.

Weak independence of quantifiers : Type $\langle 1\rangle$ quantifiers Q_1 and Q_2 are weakly independent iff $Q_1Q_2(R) = Q_2Q_1(R^{-1})$ for any cross-product relation R. A necessary and sufficient condition is given for weak independence to hold.

Un quantificateur (généralisé) du type $\langle n\rangle$ sur le domaine M est la fonction caractéristique d'un ensemble de relations n-aires sur M. Ainsi Q est un quantificateur du type $\langle 1\rangle$ si et seulement si $Q \subseteq \mathcal{P}(M)$. La séquence Q_1Q_2 de deux quantificateurs du type $\langle 1\rangle$ détermine un quantificateur du type $\langle 2\rangle$ de la façon suivante (R est une relation binaire) :

$$Q_1Q_2(R) = Q_1\{x \in M : Q_2(xR) = 1\}, \text{ où } xR = \{y \in M : \langle x, y\rangle \in R\}$$

Des quantificateurs Q_1 et Q_2 sont indépendants si et seulement si Q_1Q_2 $(R) = Q_2Q_1(R^{-1})$ pour toute relation binaire R. Il est facile de donner des conditions suffisantes pour l'indépendance de deux quantificateurs. Soit I_a un quantificateur individuel défini comme suit : $I_a = \{A \subseteq M : a \in A\}$. Zimmermann (1993) a montré qu'un quantificateur individuel, et seulement lui, est indépendant de tout quantificateur. D'autres conditions suffisantes pour l'indépendance de deux quantificateurs sont données dans Westerstahl (1996) mais une caractérisation complète de l'indépendance n'est pas connue, à ma connaissance.

Dans cette note je donne une caractérisation *d'indépendance faible* de deux quantificateurs du type $\langle 1\rangle$. Soit R une relation-produit binaire, c'est-à-dire $R = P_1 \times P_2$, $(P_1, P_2 \subseteq M)$ et Q_1 et Q_2 deux quantificateurs du type

$\langle 1\rangle$. Nous dirons que Q_1 et Q_2 sont faiblement indépendants si et seulement si $Q_1Q_2(R) = Q_2Q_1(R^{-1})$ pour toute relation-produit R.

Le fait que certaines propriétés non-triviales de quantificateurs peuvent dépendre de leurs comportement sur les relations produits est bien connu. On sait (Keenan 1992) qu'il existe des quantificateurs du type $\langle 2\rangle$ qui ne sont déterminés par aucune séquence de deux quantificateurs du type $\langle 1\rangle$ et la démonstration de ce fait prend en compte essentiellement le comportement d'une classe de quantificateurs sur les relations produits. On trouve certaines généralisations et extensions de ces résultats dans van Eijck 2005 et Zuber 2003. Ce type de résultats peut être utilisé pour expliquer des différences dans la portée des quantificateurs.

A chaque quantificateur Q du type $\langle 1\rangle$ on associe son complément booléen $\neg Q$, son post-complément $Q\neg$, défini comme $Q\neg = \{P \subseteq M : P' \in Q\}$ et son dual Q^d, défini comme $Q^d = \neg(Q\neg) = (\neg Q)\neg$.

Q est positif, $Q \in POS$, si et seulement si $Q(\emptyset) = 0$, Q est dualement positif, $Q \in DPOS$, si et seulement si $Q(M) = 1$, Q est complet, $Q \in CMPL$, si et seulement si pour tout P il est vrai que $P \in Q$ ou $P' \in Q$, Q est non-contradictoire, $Q \in NCON$, si et seulement s'il n'est pas vrai que $P \in Q$ et $P' \in Q$, Q est constant sur les compléments, $Q \in CCOMP$ si et seulement si $Q(P) = Q(P')$, Q est auto-dual, $Q \in ADUAL$, si et seulement si $Q^d = Q$. Quand $Q = \emptyset$ ou $Q = \mathcal{P}(M)$, Q est trivial . Finalement Q est atomique si et seulement s'il ne contient qu'un seul élément et Q est degeneré, $Q \in DEG$, si et seulement si $Q(P) = 1 \equiv P = \emptyset \vee P = M$. A partir de ces notions on obtient les lemmes suivants :

Lemme 1: *(i) $Q \in ADUAL$ si et seulement si $Q \in CMPL \cap NCON$ si et seulement si $\neg Q = Q\neg$, (ii) $Q \in CCOMP$ si et seulement si $Q = Q\neg$.*

Lemme 2: *$Q_1Q_2(R) = (Q_1\neg)(\neg Q_2)(R)$ pour toute relation R.*

Lemme 3: (Keenan 1992) *Si $Q \in POS$ alors $Q(P_1 \times P_2) = P_1$ si $Q(P_2) = 1$ et $Q(P_1 \times P_2) = \emptyset$ si $Q(P_2) = 0$.*

Lemme 4: *Si $Q \notin POS$ alors $Q(P_1 \times P_2) = P_1'$ si $Q(P_2) = 0$ et $Q(P_1 \times P_2) = M$ si $Q(P_2) = 1$.*

Lemme 5: *Si $Q_1, Q_2 \in POS$ alors $Q_1Q_2(P_1 \times P_2) = 1$ si et seulement si $Q_1(P_1) = 1$ et $Q_2(P_2) = 1$.*

Ces lemmes permettent d'obtenir une série de conditions suffisantes pour l'indépendance faible de deux quantificateurs :

Proposition 6: *Si $Q_1 = \mathcal{P}(M)$ et $Q_2 \in DPOS$ ou $Q_2 = \mathcal{P}(M)$ et $Q_1 \in DPOS$ alors Q_1 et Q_2 sont indépendants (et donc faiblement indépendants).*

Le lemme 5 donne lieu à la condition suivante :

Proposition 7: *Si $Q_1, Q_2 \in POS$ alors Q_1 et Q_2 sont faiblement indépendants.*

La proposition suivante est un analogue du résultat de Zimmermann :

Proposition 8: *Si $Q \in POS \cap ADUAL$ et Q_1 arbitraire, alors Q et Q_1 sont faiblement indépendants.*

Démonstration :
Soit Q_1 arbitraire. Si $Q_1 \in POS$ alors le résultat s'ensuit de la proposition 7. Si $Q_1 \notin POS$, étant donné le lemme 2, nous pouvons considérer l'expression (i) $\neg(Q\neg)(\neg Q_1)(P_1 \times P_2)$. Dans (i) les deux quantificateurs complexes, $\neg(Q\neg)$ et $\neg Q_1$, sont tous les deux positifs. Par conséquent, en vertue du lemme 5, (i) est équivalent à (ii) $(\neg Q_1)(\neg(Q\neg)(P_2 \times P_1)$ et (ii) est équivalent à (iii) $\neg Q_1 Q(P_2 \times P_1)$. L'équivalence entre (i) et (iii) montre que Q et Q_1 sont faiblement indépendants.

Proposition 9: *Si $Q_1, Q_2 \in ADUAL$ alors Q_1 et Q_2 sont faiblement indépendants.*

Démonstration :
Supposons d'abord que $Q_1 \notin POS$ et $Q_2 \notin POS$. Dans ce cas, d'après le lemme 2 la séquence (i) Q_1Q_2 détermine le même quantificateur (du type $\langle 2 \rangle$) que la séquence (ii) $Q_1\neg\neg Q_2$. Etant donné que dans (ii) les deux quantificateurs constituant la séquence sont positifs (car $Q_1, Q_2 \in ADUAL$) nous obtenons les équivalences dans (iii) qui donnent le résultat recherché : (iii) $Q_1Q_2(P_1 \times P_2)$ si et seulement si (lemme 2) $Q_1\neg\neg Q_2(P_1 \times P_2)$ si et seulement si (lemme 5) $\neg Q_2 Q_1 \neg(P_2 \times P_1)$ si et seulement si (autodualité de Q_1 et de Q_2) $Q_2\neg\neg Q_1(P_2 \times P_1)$ (lemme 2) si et seulement si $Q_2Q_1(P_2 \times P_1)$. Le cas où $Q_1 \in POS$ et $Q_2 \notin POS$ correspond à la proposition 8.

Les conditions suivantes concernent les quantificateurs qui ne sont pas positifs :

Proposition 10: *Si $Q_1 \notin POS$ et $Q_2 \notin POS$ et $Q_1, Q_2 \in CCOMP$ ou $Q_1, Q_2 \in ADUAL$ alors Q_1 et Q_2 sont faiblement indépendants.*

Démonstration :
Soit $Q_1, Q_2 \in CCOMP$. Les quantificateurs $\neg Q_1 \neg$ et $\neg Q_2$ sont positifs. La suite suivante des équivalences prouve alors la première parti de la proposition : $\neg Q_1 Q_2(P_1 \times P_2)$ si et seulement si (lemme 2) $\neg Q_1 \neg\neg Q_2(P_1 \times P_2)$ si et seulement si (lemme 5) $\neg Q_2 \neg Q_1 \neg(P_2 \times P_1)$ si et seulement si (lemme 1) $\neg Q_2 Q_1(P_2 \times P_1)$.
Le cas où $Q_1, Q_2 \in ADUAL$ correspond à la proposition 9.

Les propositions suivantes indiquent des conditions nécessaires pour l'indépendance faible des quantificateurs qui satisfont à certaines conditions spécifiques :

Proposition 11: *Si Q_1 et Q_2 sont faiblement indépendants et non-positifs alors $Q_1(M) = Q_2(M)$*

Proposition 12: *Soit Q_1 et Q_2 faiblement indépendants, non-positifs et non-triviaux. Alors :*
(i) Si $Q_1(M) = 1$ ou $Q_2(M) = 1$, alors $Q_1, Q_2 \in CCOMP$
(ii) Si $Q_1(M) = 0$ ou $Q_2(M) = 0$ alors $Q_1, Q_2 \in ADUAL$

Démonstration :
(i) Nous allons démontrer que $Q_1 \in CCOMP$. Etant donné la proposition 11, la démonstration que $Q_2 \in CCOMP$ est symmétrique.
Supposons *a contrario* que $Q_1 \notin CCOMP$. Il existe alors P_1 tel que $Q_1(P_1) \neq Q_1(P_1')$ et $Q_1(P_1) = 1$. Soit $P_2 \notin Q_2$. Puisque Q_1 et Q_2 sont faiblement indépendants nous avons (a) $Q_1Q_2(P_1 \times P_2) = Q_2Q_1(P_2 \times P_1)$. Mais cette égalité est impossible dans la situation indiquée car, d'après le lemme 4, la partie gauche de (a) est égale à $Q_1(P_1')$ et donc à 0 alors que la partie droite est égale à 1.
(ii) Supposons *a contrario* que $Q_1 \notin ADUAL$. Cela veut dire que $Q_1 \notin CMPL$ ou $Q_1 \notin NCON$. Soit d'abord $Q_1 \notin CMPL$. Il existe alors P_1 tel que $Q_1(P_1) = Q_1(P_1') = 0$. Puisque Q_1 et Q_2 sont faiblement indépendants nous avons (a) $Q_1Q_2(P_1 \times M) = Q_2Q_1(M \times P_1)$. Mais cette égalité est impossible dans les conditions indiquées car la partie gauche de (a) est égale à 0 alors que la partie droite est égale à 1. Par conséquent $Q_1 \in CMPL$.
Supposons à présent que $Q_1 \notin NCON$. Il existe alors P_1 tel que $Q_1(P_1) = Q_1(P_1') = 1$. Il est facile de montrer que dans cette situation l'égalité Q_1Q_2 $(P_1 \times P_2) = Q_2Q_1(P_2 \times P_1)$ est impossible. Ceci implique que $Q_1 \in NCON$ et donc que $Q_1 \in ADUAL$.
La démonstration que $Q_2 \in ADUAL$ se fait de façon analogue.

Nous pouvons maintenant présenter le résultat principal de cette note :

Théorème 13: *Soit Q_1 et Q_2 deux quantificateurs différents du type $\langle 1 \rangle$. Alors Q_1 et Q_2 sont faiblement indépendants si et seulement si l'une des conditions suivantes est vraie :*
(i) $Q_1 = \mathcal{P}(M)$ et $Q_2 \in DPOS$ ou $Q_2 = \mathcal{P}(M)$ et $Q_1 \in DPOS$
(ii) $Q_1, Q_2 \in POS$
(iii) $Q_1 \in POS \cap ADUAL$ ou $Q_2 \in POS \cap ADUAL$
(iv) $Q_1, Q_2 \in POS' \cap ADUAL$ ou $Q_1, Q_2 \in POS' \cap CCOMP$

Démonstration :
1. Supposons d'abord que Q_1 ou Q_2 soit trivial. Dans ce cas si Q_1 et Q_2 sont faiblement indépendants nous avons soit (a) $Q_1 = \mathcal{P}(M)$ et $Q_2 \in DPOS$ (ou $Q_2 = \mathcal{P}(M)$ et $Q_1 \in DPOS$), soit (b) $Q_1 = \emptyset$ et $Q_2 \in POS$ (ou $Q_2 = \emptyset$ et $Q_1 \in POS$). Le cas (a) correspond à la condition (i) et le cas (b) correspond à la condition (ii). Autrement dit nous avons démontré, étant donné la Proposition 6, que si Q_1 ou Q_2 est trivial alors Q_1 et Q_2 sont faiblement indépendants si et seulement si (i) ou (ii) est vrai.
2. Supposons maintenant que ni Q_1 ni Q_2 ne soit trivial. On distingue deux sous-cas : (2a) $Q_1 \in POS$ ou $Q_2 \in POS$ et (2b) $Q_1 \notin POS$ et $Q_2 \notin POS$.
Le cas (2a) : Supposons d'abord qu'un seul quantificateur est positif. On montre alors par la manipulation sur les valeurs possibles qu'il doit en même temps être autodual. Soit $Q_1 \in POS$ et $Q_2 \notin POS$. Q_2 n'étant pas trivial il existe P_2 tel que $Q_2(P_2) = 0$. On montre que $Q_1 \in ADUAL$: Supposons que P_1 soit arbitraire et $Q_1(P_1) = 0$. Alors, puisque $Q_1Q_2(P_1 \times P_2) = Q_2Q_1(P_2 \times P_1)$, $Q_1(P_1') = 1$ et donc $Q_1 \in CMPL$. On montre de la même façon que si $Q_1(P_1) = 1$ alors $Q_1(P_1') = 0$ et donc $Q_1 \in NCON$. Cela implique que $Q_1 \in ADUAL$. Donc si exactement un quantificateur est positif (et aucun n'est trivial) alors les deux quantificateurs sont faiblement indépendant ssi la condition (iii) est satisfaite. Si les deux quantificateurs sont positifs alors la condition (ii) est satisfaite.
Le cas (2b) : Soit $Q_1 \notin POS$ et $Q_2 \notin POS$. On distingue alors, étant donné la proposition 12, deux cas : (2ba) $Q_1 \in ADUAL$ ou $Q_2 \in ADUAL$ et (2bb) $Q_1 \in CCOMP$ ou $Q_2 \in CCOMP$.
Le cas (2ba) : Si $Q_1 \in ADUAL$ (ou $Q_2 \in ADUAL$) alors $Q_1(M) = Q_2(M) = 0$ et donc, d'après la proposition 12, $Q_1 \in ADUAL$ et $Q_2 \in ADUAL$) et donc la condition (iv) est vraie et par conséquent dans ce cas Q_1 et Q_2 sont faiblement indépendants si et seulement si (iv) est vrai.
Le cas (2bb) : Si $Q_1 \in CCOMP$ alors $Q_1(M) = Q_2(M) = 1$. Par conséquent (étant donné la proposition 12) $Q_2 \in CCOMP$ et donc (iv) est également vrai.

Exemple : Soit $Q = AU\!-\!MOINS(n, A)$ défini comme suit : $AU\!-\!MOINS(n, A)(P) = 1$ si et seulement si $|A \cap P| \geq n$. Soit $Q_1 = \neg(I_a \cup I_b)$. On observe (dans les domaines finis) que si $n = |A|/2$ et $|A|$

est pair, alors $Q \in ADUAL$. On remarque également que $Q_1 \notin POS$ D'après la proposition 8, Q et Q_1 sont faiblement indépendants. Cependant ils ne sont pas indépendants car $QQ_1(R) \neq Q_1Q(R^{-1})$ pour la relation $R = A_1 \times \{a\} \cup A_2 \times \{b\}$ (si $|A_1| + |A_2| \geq |A|/2$, $|A_1| < |A|/2$ et $|A_2| < |A|/2$).

Les résultats présentés plus haut permettent d'établir facilement des conditions sous lesquelles un quantificateur est faiblement auto-commutatif, c'est-à-dire faiblement indépendant "de lui-même" :

Proposition 14: *Q est faiblement auto-commutatif, c'est-à-dire $QQ(R) = QQ(R^{-1})$, pour toute relation-produit R, si et seulement si une des conditions suivantes est vraie :*
(i) $Q \in POS$
(ii) Q est trivial.
(iii) Q est atomique.
(iv) $Q \in ADUAL \cup CCOMP$.
(v) $Q \in DEG$.

Laboratoire de Linguistique Formelle
CNRS et Université Paris 7
2 Place Jussieu
F-75005 Paris
E-mail: Richard.Zuber@linguist.jussieu.fr

RÉFÉRENCES

[1] van Eijck, J. (2005) Normal Forms for Characteristic Functions on n-ary Relations *Journal of Logic and Computation* 15 : 89–98.

[2] Keenan, E.L. (1992) Beyond the Frege Boundary *Linguistics and Philosophy* 15 :2, 199–221.

[3] Westerstahl, D. (1996) Self-commuting Quantifiers *The Journal of Symbolic Logic* 63 :1, 212–224.

[4] Zimmermann, T.E. (1993) Scopless Quantifiers and Operators, *Journal of Philosophical Logic* 22 : 545–561.

[5] Zuber, R. (2003) Quantificateurs faiblement réducibles, *Logique et Analyse* 183-184, 441–446.